УДК 517.524

РАЗЛОЖЕНИЕ В ЦЕПНУЮ ДРОБЬ ФУНКЦИЙ $\sin(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{csch}(x)$

С.Н. Гладковский

Автором предложен элементарный вывод разложения в цепную дробь функций $\sin(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{csch}(x)$

Ключевые слова: непрерывная дробь, цепная дробь.

Функциям $\sin(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$ явно не повезло с освещением их разложения в цепную дробь: автору удалось найти формулу для $\sin(x)$ в [11,с.138] – без вывода:

$$\sin(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{(2\ \ 3 - x^2) + \cfrac{2\ \ 3x^2}{(4\ \ 5 - x^2) + \cfrac{4\ \ 5x^2}{(6\ \ 7 - x^2) + }}}} \qquad (1)$$

В [3,с.304] сказано: ” Общий вид разложения в цепную дробь $\sin x$ неизвестен. По методу Висковатого можно найти лишь конечное множество звеньев такого разложения. Например,

$$\sin(x) = \frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{6-}\,\frac{7x^2}{10+}\,\frac{11x^2}{98-}\,\frac{551x^2}{198+\dots} \qquad [\dots\ \dots] \qquad (2)$$

и

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6+}\,\frac{3x^2}{10-}\,\frac{11x^2}{42+}\,\frac{25x^2}{66-\dots} \qquad ” \qquad (3)$$

В [4,с.109] приведены эти же формулы, но со ссылкой на [7,с.165].

В [7,с.162…164] также отмечено, что ”общий вид разложения в цепную дробь неизвестен” и приведён вывод аналогичных формул для $\operatorname{sh}(x)$ методом Висковатого, из которых заменой x на ix получены (2), (3) [7,с.165]. Там же приведены разложения и для $\frac{x}{\sin x} = x\operatorname{cosec} x$, которые, как отмечено, ”имеются в книге Корноухова”:

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6-}\,\frac{7x^2}{10+}\,\frac{11x^2}{98-}\,\frac{551x^2}{198+\dots} \qquad (4)$$

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1-}\,\frac{x^3}{6+}\,\frac{3x^2}{10-}\,\frac{11x^2}{42+}\,\frac{25x^2}{66-\dots} \qquad (5)$$

Автору не удалось обнаружить ***общий вид разложения*** в цепную дробь для $\sin(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$ ни в общеизвестных справочниках (см., например, [5],[8]), ни в многочисленных монографиях специально посвящённых цепным дробям (см., например, [1],[2],[6],[9],[10],[12],[13],[14],[15],[16],[17]). Это тем более удивительно, что формула Эйлера обращения ряда в цепную дробь хорошо известна (см., например, [3,с.281],[7,с.27], [13,с.17]). В [2,с.55] отношение к ней выражено следующими словами: ”Между прочим, заметим, что связь между бесконечными рядами и непрерывными дробями, описанная выше, представляет весьма ограниченный интерес, поскольку в этом случае характер сходимости (или расходимости) для них совершенно одинаков.” По моему мнению, такая оценка не только не этична, но и глубоко ошибочна.

В конце 1997 г. автор попытался применить формулу Эйлера [3, гл.5, §1, п.6, (5.16), с.281] обращения ряда в цепную дробь :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \frac{c_1 x}{1-}\,\frac{c_2 x}{c_1 + c_2 x -}\,\frac{c_1 c_3 x}{c_2 + c_3 x -}\cdots\frac{c_{n-2} c_n x}{c_{n-1} + c_n x -}\cdots \qquad (6)$$

для ряда [4, гл.3, §1, п.2,1 ,с.93]

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad (7).$$

Видим, что непосредственно (6) нельзя использовать, так как коэффициенты с чётными индексами равны нулю. Был найден следующий выход. Пусть $x^2 = p$, тогда

$$y(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{p^k}{(2k+1)!} = 1 - \tfrac{1}{6}p + \tfrac{1}{120}p^2 - \tfrac{1}{5040}p^3 + \tfrac{1}{362\,880}p^4 - \dots$$

Рассматривая как исходный ряд

$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{p^k}{(2k+1)!}$, (8)

получаем $c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \neq 0$ ни при каких целых n. И (6) получает вид:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n = c_0 + \frac{c_1 p}{1-} \frac{c_2 p}{c_1 + c_2 p -} \frac{c_1 c_3 p}{c_2 + c_3 p -} \cdots \frac{c_{n-2} c_n p}{c_{n-1} + c_n p -} \cdots$ (9)

$= 1 + \frac{-\frac{p}{3!}}{1-} \frac{\frac{p}{5!}}{-\frac{1}{3!} + \frac{p}{5!} -} \frac{\left(-\frac{1}{3!}\right)\left(-\frac{1}{7!}p\right)}{\frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}p -} \cdots \frac{\frac{(-1)^{n-2}}{(2n-2\times 2+1)!} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} p}{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2+1)!} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} p -} \cdots$ (10)

Возвращаясь к (9), замечаем, что начиная с некоторого места проступает структура формулы. Которую можно отразить, используя рекуррентный способ записи. Пусть

$E_1 = c_1 + c_2 p - \frac{c_1 c_3 p}{E_2}$, тогда

$E_2 = c_2 + c_3 p - \frac{c_2 c_4 p}{E_3}$,

$E_3 = c_3 + c_4 p - \frac{c_3 c_5 p}{E_4}$, и вообще

$E_n = c_n + c_{n+1} p - \frac{c_n c_{n+2} p}{E_{n+1}}$. (11)

А (9) приобретает вид:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n = c_0 + \frac{c_1 p}{1-} \frac{c_2 p}{E_1}$ (12)

Полагая $p = 1$, получим преобразованную формулу (6):

$$\left.\begin{aligned} E_n &= c_n + c_{n+1} - \frac{c_n c_{n+2}}{E_{n+1}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= c_0 + \frac{c_1}{1 - \frac{c_2}{E_1}} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

при условии, что $c_n \neq 0$.

Возвращаясь к нашей функции $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{p^k}{(2k+1)!}$, имеем:

$c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

$E_n = c_n + c_{n+1} p - \frac{c_n c_{n+2} p}{E_{n+1}}$

$$E_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2+1)!} p - \frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+4+1)!} p}{E_{n+1}}$$

Делаем замену переменных:

$E_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} U_n; E_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2+1)!} U_{n+1}; E_1 = -\frac{U_1}{3!}$;

$$\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} U_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2+1)!} p - \frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+4+1)!} p}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2+1)!} U_{n+1}}$$

$$U_n = 1 - \frac{p}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{\frac{p}{(2n+4)(2n+5)}}{U_{n+1}}$$

Делаем ещё одну замену переменных:

$U_n = \frac{W_n}{(2n+2)(2n+3)}; U_{n+1} = \frac{W_{n+1}}{(2n+4)(2n+5)}; U_1 = \frac{W_1}{4 \times 5}$;

$$\frac{W_n}{(2n+2)(2n+3)} = 1 - \frac{p}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{\frac{p}{(2n+4)(2n+5)}}{\frac{W_{n+1}}{(2n+4)(2n+5)}}$$

$W_n = (2n+2)(2n+3) - p + \dfrac{(2n+2)(2n+3)p}{W_{n+1}}$ и

$$E_1 = -\frac{U_1}{3!} = -\frac{\frac{W_1}{4\times 5}}{3!} = -\frac{1}{120}W_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n = c_0 + \frac{c_1 p}{1-}\ \frac{c_2 p}{E_1} = 1 + \frac{-\frac{1}{3!}p}{1 - \frac{\frac{1}{5!}p}{-\frac{1}{120}W_1}} = 1 - \frac{1}{6}\frac{p}{1 + \frac{p}{W_1}}$$

И получаем:

$$W_n = (2n+2)(2n+3) - p + \frac{(2n+2)(2n+3)p}{W_{n+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n = 1 - \frac{p}{6 + \frac{6p}{W_1}}$$

Если выразить результат не через W_1, а через W_0, то получим

$W_0 = 6 - p + \dfrac{6p}{W_1}$, то есть : $W_1 = 6\dfrac{p}{W_0 - 6 + p}$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n = 1 - \frac{p}{6 + \frac{6p}{6\frac{p}{W_0 - 6 + p}}} = 1 - \frac{p}{W_0 + p}.$$

То есть, $\dfrac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n = 1 - \dfrac{p}{W_0 + p} = 1 - \dfrac{x^2}{W_0 + x^2}$; или

$\sin(x) = x\left(1 - \dfrac{x^2}{W_0 + x^2}\right)$, $W_0 = \sin(x)\dfrac{x^2}{-\sin(x) + x}$; также

$$\frac{1}{\sin(x)} = \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{x\left(1 - \frac{x^2}{W_0 + x^2}\right)} = \frac{W_0 + x^2}{xW_0} = \frac{1}{x} + \frac{x}{W_0}.$$

Искомое:

$$\left.\begin{aligned} &\sin(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{W_0 + x^2}\right) \\ &\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{W_0} \\ &W_n = (2n+2)(2n+3) - x^2 + \frac{(2n+2)(2n+3)x^2}{W_{n+1}} \\ &W_0 = \sin(x)\frac{x^2}{x - \sin(x)} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Заменяя в (14) x на ix получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{sh}(x) = x\left(1 + \frac{x^2}{W_0 - x^2}\right) \\
&\mathrm{csch}(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{W_0} \\
&W_n = (2n+2)(2n+3) + x^2 - \frac{(2n+2)(2n+3)x^2}{W_{n+1}} \\
&W_0 = \frac{x^2\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{sh}(x) - x}
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

В заключение отметим, что для косеканса и гиперболического косеканса полученные цепные дроби, естественно, не являются равноценными; впрочем, как и для исконных функций $\frac{x^2\sin(x)}{x-\sin(x)}$ и $\frac{x^2\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{sh}(x)-x}$.

Литература

1. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде /пер. с англ. под ред. Гончара А.А. М.: Мир, 1986, – 502с. ил.
2. Джоунс У., Трон У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения /ред. пер. с англ.: И.Д. Софронов. М.: Мир, 1985, – 414с. ил.
3. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)/ Под ред. Люстерника Л.А. и Янпольского А.Р. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.
4. Математический анализ. Вычисление элементарных функций/ Под ред. Люстерника Л.А. и Янпольского А.Р. М.: Физматгиз, 1963.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган /пер. с англ. под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной М.: Наука, 1979, 832 стр. с илл.
6. Стилтьес Т.И. Исследования о непрерывных дробях /пер. с фр. под ред. Ахиезера Н.И. Харьков: Государственное научно-техническое издательство Украины, 1936.– 156 с.
7. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа. М.: Гостехиздат, 1956., 204 с.
8. A.Cuyt, V.Brevik Petersen, B.Verdonk, H.Waadeland , W.B.Jones. Handbook of Continued fractions for Special Functions. New York: Springer, 2008.– 431s.
9. Jones W.B., Thron W.J. Continued fractions. Analytic theory and applications.London: Addison-Wesley P C, 1980.– 457s.
10. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fractions with applications. Amsterdam, London, New York, Tokyo: North Holland, 1992.– 623s.
11. Olds C.D. Continued fractions. Yale: Mathematical Association of America, 1963.– 162 s
12. Perron O. Die Lehre von den Kettenbruechen. Band 1. 3ed., Gottingen: Teubner, 1954.– 200 s.
13. Perron O. Die Lehre von den Kettenbruechen. Band 2. 3ed., Stuttgart: Teubner, 1957.– 322 s.
14. Rockett A.M., Szuesz P. Continued fractions. London: World Scientific Publishing, 1992.– 196s.
15. Stieltjes T.J. Oeuvres completes, tome 1. Groningen: Noordhoff, 1918.– 467s.
16. Stieltjes T.J. Oeuvres completes, tome 2. Groningen: Noordhoff, 1918.– 609 s.
17. Wall H.S. Analytic theory of continued fractions. New York: Chelsea, 1948.– 445s.

S.N. Gladkovskii

Continued fraction expancsion for function’s $\sin(x)$, $\mathrm{cosec}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{csch}(x)$

The autor propose the elementary derivation of the continued fraction expancsion for function’s $\sin(x)$, $\mathrm{cosec}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{csch}(x)$

Keywords: continued fraction, chain fraction

Гладковский Сергей Николаевич
E-mail: journaly2010@bk.ru